Вопросы по математике 1 курс 1 семестр

1.Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами и их свойства.

*Матрица* – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

*Виды* *матриц*:

\*если m > 1, n= 1, то А – матрица-столбец;

\*если m = 1, n > 1, то А – матрица-строк;

\*если m=n, А – квадратная матрица N-ого порядка;

\*если m≠n, А – прямоугольная матрица;

\*если матрица любого размера состоит из 0, А – нулевая матрица;

*Операции* *над* *матрицами*:

1)Сложение матриц

Суммой двух матриц одного размера mxn, называется матрица того же размера, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц слагаемых.

2)Умножение на число

Произведение матрицы А на число k, называют матрицу kA, каждый элемент которой получают умножение элемента a на число k.

3)Вычитание матриц

Разностью двух матриц одного размера mxn, называется матрица того же размера, каждый элемент которой равен разности элементов матриц.

C = A – B = A + (-1)\*B

4)Умножение

Произведением двух сцепленных матриц и называют матрицу , каждый элемент которой, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы А и j-ого столбца матрицы В.

*Свойства*:

1)А + В = В + А

2)(А + В) + С = А + (В + С)

3)А + 0 = А, где 0 – нулевая матрица

4)А – А = 0

5)(α+β)\*А = αА + βА, где α и β – числа

6)( α \* β ) \* А = α ( β \* А )

7)(А \* В) \* С = А \* (В \* С)

8)(А + В) \* С = АС + ВС

9) А \* Е = А

10) АВ ≠ ВА

5)Возведение в степень

В степень возводят только квадратные матрицы при условии, что показатель – натуральное число.

Если показатель степени большой(n > 3), то при возведении в степень, используют электронный математическое свойства:

\* \* =

\* =

6)Транспонирование

Если в матрице поменять местами строки и столбцы, не меняя порядок следования элементов, то получим матрицу, транспонированную данной.

Свойства:

\*

\*

2) Определители квадратных матриц. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы. Теорема Лапласа. Свойства определителей.

Определителем матрицы А n-ого порядка называют число, которое можно найти по формуле:

Знак + выбирается в том случае, когда перестановка (), , а -, если нечётная.

Минор – определитель (n -1) порядка, получаемый вычеркиванием i-той строки и j-ого столбца.

Алгебраическое дополнение элементов матрицы – число, где доп. Минор, определитель матрицы, получающийся из исходной матрицы путём вычёркивания i-ой строки и j-ого столбца.

Теорема Лапласа:

Определитель матрицы n-ого порядка равен сумме произведений элемента какой-либо строки(столбца) на соответственное алгебраическое дополнение.

Свойства определителей:

1) Определитель не меняется, если матрицу транспонировать

2) Определитель меняет знак, если поменять местами 2 строки(столбца)

3) Общий множитель элемента любой строки(столбца) можно выносить за знак определителя

4) Определитель не изменится, если элементы одной строки прибавить к элементам другой строки, умноженное на число

5) Определитель равен 0 в каждом из следующих случаев:

а) есть 0-вая строка(столбец)

б) есть равные или пропорциональные строка и столбцы

3) Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Нахождение ранга матрицы.

Ранг матрицы А – такое число r, что среди всех миноров порядка r есть хотя бы один не нулевой,

А все миноры (r+1)-го порядка = 0

Элементарные преобразования матрицы:

1) умножение какой-либо строки(столбца) на число ≠ 0

2) прибавление к какой-либо строке(столбцу) другой строки(столбца), умноженной на неравное нулю число

3) перестановка любых двух строк(столбцов)

4) отбрасывание нулевых строк(столбцов)

5) транспонирование матрицы

Нахождение ранга матрицы

1) элементарные преобразования матрицы, представленные выше

2) метод окаймляющих миноров

4) Понятие обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Способы нахождения обратной матрицы.

Обратная матрица - называют обратной к матрице А, если выполняется равенство:

Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы: обратная матрица существует тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Способы нахождения обратной матрицы

1) Через алгебраические дополнения:

а) находят определитель матрицы А и убеждаются, что он не равен нулю

б) находят алгебраическое дополнение для каждого элемента матрицы

в) составляют обратную матрицу

2) Метод элементарных преобразований:

Приводят расширенную матрицу (А|Е) к виду (Е|

5) Система m линейных уравнений с n переменными. Основные понятия.

Линейное уравнение – уравнение вида где

СЛУ, содержащей m уравнений с n неизвестными, называют систему, вида:

Решением СЛУ называют числа: при подстановке которых в систему, каждое уравнение обращается в тождество.

Если СЛУ имеет единственное решение, её называют определённой. Если решений бесконечно много, систему называют неопределённой.

Если СЛУ разрешима(имеет хотя бы одно решение), её называют совместной. Если решений нет, системы называют несовместной.

6) Методы решения СЛУ: обратной матрицы, Крамера и Гаусса. Теоремы Кронекера-Капелли и о множестве решений СЛУ.

Методы решения СЛУ:

1) Матричный метод(метод обратной матрицы)

Пусть дана СЛУ из n уравнений, n-неизвестно, тогда матрица системы является квадратной. Если матрица А – невырожденная, тогда для неё существует обратная матрица.

2) Метод Крамера применяют для таких СЛУ, у которых матрица системы квадратная и невырожденная.

3) Метод Гаусса является универсальным и эффективным методом для решения СЛУ.

Теорема Кронекера-Капелли: СЛУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы это системы.

Теорема о множестве решений совместной СЛУ: если ранг равен n, значит ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы.

7) Однородные СЛУ. Свойства решений однородных СЛУ. Понятие ФСР.

Однородная СЛУ – СЛУ, в которой все свободные члены = 0

Свойства:

1) Если ранг матрицы равен n, значит в системе единственное тривиальное решение

2) Если ранг меньше n, бесконечно много решений(есть нетривиальное)

3) Если X и Y – два нетривиальных решений СЛОУ, то их линейные комбинации αX + βY также является решением данной системы.

4) Решение однородной СЛУ, Е1, Е2,…, Еz называют линейно независимыми, если равенство (0 – нулевая матрица-столбец) выполняется при условии

5) Линейно-независимые решения однородной СЛУ образуют фундаментальную систему решений(ФСР), любое другое решение является линейной комбинаций ФСР.

ФСР – совокупность линейно независимых решений

8)Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами, их свойства.

1) Сумма

Суммой a и b называют с, начло которого совпадает с концом вектора b, а конец с вектором a при условии, что начало b совпадает с концом a

2) Умножение вектора на число

a \* λ = λa, длина которого равна |λ| \* |а| и λa îî a

3) Вычитание

Свойства:

1)

2)

3)

4)

5) λ\*() = λ

6) λ\*() =

9) Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. Свойства скалярного произведения.

Координаты вектора – проекции вектора на оси координат при условии, что начало вектора совпадает с началом координат.

Скалярное произведение векторов a и b называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Угол между векторами – меньший из углов, образованный ими после приведения к общему началу.

Свойства скалярного произведения:

1)

2)

3) – скалярный квадрат вектора

10) Векторное и смешанное произведение векторов.

Векторное произведение векторов a и b – вектор c, обладающий след. свойствами:

1),

2) || = || \* || \* sin( ;)

3)а, b, c – правая тройка

Смешанное произведение -  [скалярное произведение](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8F%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) [вектора](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) {\displaystyle \mathbf {a} }a на [векторное произведение](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) [векторов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) {\displaystyle \mathbf {b} } b и c.

11) Прямая на плоскости: виды уравнений прямой, взаимное расположение прямых на плоскости, расстояние от точки до прямой.

Пусть прямая проходит через точку *М0 (x0,y0*) перпендикулярно вектору ***n****= {A,B*}. Тогда вектор https://konspekta.net/studopediaru/baza18/386173961161.files/image009.gif, где *М(х,у*) – произвольная точка прямой, ортогонален ***n***. Поэтому координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

*А*(*х – х0*) + *В*(*у – у0*) = 0 - (7.3)

уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Замечание. Вектор **n** называется **нормалью** к прямой.

Преобразуем уравнение (7.3) к виду:

*Ах + Ву + (-Ах0 – Ву0*) = 0.

Обозначив *-Ах0 – Ву0* = С, получим **общее уравнение прямой:**

*Ах + Ву + С* = 0. (7.4)

Получим теперь уравнение прямой, проходящей через точку *М0 (x0,y0*) параллельно вектору ***q****= {l,m*}. Так как вектор https://konspekta.net/studopediaru/baza18/386173961161.files/image009.gif, где *М(х,у*) – произвольная точка прямой, коллинеарен ***q***, координаты любой точки данной прямой удовлетворяют уравнению

https://konspekta.net/studopediaru/baza18/386173961161.files/image010.gif, (7.5)

называемому **каноническим уравнением прямой**. Вектор **q** при этом называется **направляющим вектором прямой**. В частности, если прямая проходит через точки *М1(х1,у1*) и *М2(х2,у2*), ее направляющим вектором можно считать https://konspekta.net/studopediaru/baza18/386173961161.files/image011.gif, и из уравнения (7.5) следует:

https://konspekta.net/studopediaru/baza18/386173961161.files/image012.gif- (7.6)

**уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**.

Обозначив за t значения равных дробей, стоящих в левой и правой частях уравнения (7.5),

можно преобразовать это уравнение к виду:

*x = x0 + lt, y = y0 + mt -*(7.7)

**параметрические уравнения прямой**.

Для прямой *l*, не параллельной оси Оу, можно ввести так называемый **угловой коэффициент *k*** – тангенс угла, образованного прямой и осью Ох, и записать уравнение прямой в виде:

*у = kx + b* - (7.8)

**уравнение прямой с угловым коэффициентом**.

Действительно, все точки прямой *l*1, параллельной *l* и проходящей

через начало координат, удовлетворяют уравнению *у = kх*, а

ординаты соответствующих точек на прямой *l* отличаются от них

на постоянную величину *b*.

12) Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

*Кривой второго порядка* на плоскости называют линию, которую можно задать уравнением:

Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0

A^2 + B^2 + C^2 при этом не равняется нулю.

А, Б, С – некоторые действительные числа, которые отвечают за вид прямой.

Д, Е, Ф – действительные числа, которые отвечают за расположение прямой на плоскости.

Существует *4 вида кривых*:

-Окружность

-Эллипс

-Гмпербола

-Порабола

*ОКРУЖНОСТЬ* – это множество точек плоскости, удалённых от данной точки (центра) на равном расстоянии (радиус окружности).

(х – х0)^2 + (y – y0)^2 = R^2 - *каноническое уравнение*

Если раскрыть скобки и привести подобные, то получим общее уравнение рассмотренного выше вида.

Если в общем уравнении А = С, В = 0 => окружность.

*Замечание:*

- Если при составлении уравнения окружности или приведении к каноническому виду в правой части 0, то говорят, что окружность вырождается в точку.

- Если же справа отрицательное число, то уравнение не задаёт на плоскости никакой линии.

*ЭЛЛИПС* – это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных (фокусов) есть величина постоянная (2а).

Если F1 и F2 – фокусы, а М произвольная точка, то по определению MF1 + MF2 = 2a.

Выведем каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси ОХ и симметричны относительно начала координат.

X^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - *каноническое уравнение*

- Если y = 0 , то x^2/a^2 = 1 => x = +-a

- Если х = 0, то y^2/b^2 = 1 => y = +-b

ГИПЕРБОЛА – множество точек плоскостей, абсолютная величина разностей расстояний, которых до двух данных (фокусов) есть величина постоянная (2а).

F1, F2 – фокусы

М – произвольная точка |MF1 – MF2| = 2a

Получим каноническое уравнение гиперболы, при условии, что её фокусы имеют координаты.

X^2/a^2 – y^2/b^2 = 1 – *каноническое уравнение*

- Если y = 0, то x^2/a^2 = 1 => x = +-a

А12(+-а; 0) – вершины гиперболы

а – действительная полуось

- Если x = 0, то –y^2 = b^2 – действительных решений нет.

В12(0; +-b) – мнимые вершины

b – мнимая полуось

*Частные случаи:*

- Если F12(0; +-с), то y^2/b^2 – x^2/a^2 = 1 – уравнение гиперболы

- Если а = b, то x^2/a^2 – y^2/a^2 = 1, y = +-x – асимптоты (равнобочная гипербола)

*ПАРАБОЛА* – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки-фокуса и от данной прямой-директрисы.

Получим уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ОХ, а директриса параллельна ОУ и пересекает ОХ в точке, симметричной фокусу.

Y^2 = 2px – каноническое уравнение параболы с вершиной О(0; 0) – симметрична относительно ОХ.

X^2 = 2py – каноническое уравнение параболы с вершиной О(0; 0), которая симметрична относительно ОУ.

13) Преобразование системы координат. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

*Преобразование системы координат* – переход от одной системы координат к другой при определённых условиях.

1) *Параллельный перенос осей координат* – переход от системы координат ХОУ к системе Х, О, У, при которой меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб сохраняется.

2) *Поворот осей координат* – такое преобразование, при котором координаты оси поворачиваются на один и тот же угол, а положение начальных координат и масштаб не меняется.

*Вывод:* используя рассмотренные преобразования, можно получить каноническое уравнение кривых второго порядка при определённых условиях накладываемых на параметры.

14) Плоскость и прямая в пространстве.

А(х – х0) + В(у у0) + С(з – з0) = 0 – каноническое уравнение плоскости в пространстве

Ах+Ву+Сз+Д = 0 – общее уравнение плоскости в пространстве

|x – x0/m = y – y0/n = z – z0/p| - каноническое уравнение прямой в пространстве

А1х+В1у+С1з+Д1 = 0 (в системе с таким же уравнением, только вместо 1 - 2) – общее уравнение прямой в пространстве

- Если плоскости перпендикулярны (Плоскость и прямая в пространстве с примерами решения), то условием перпендикулярности плоскостей является равенство: Плоскость и прямая в пространстве с примерами решения.

- Если плоскости параллельны, то нормальные вектора коллинеарны, следовательно, условие параллельности плоскостей: Плоскость и прямая в пространстве с примерами решенияГеометрическое место точек пространства, удовлетворяющих системе уравнений, называется *прямой* в пространстве, а система уравнений называется общим уравнением прямой.

Замечание: Для того чтобы система уравнений определяла прямую в пространстве необходимо и достаточно, чтобы нормальные вектора плоскостей, определяющих прямую, Плоскость и прямая в пространстве с примерами решения были неколлинеарными, т.е. выполняется одно из неравенств: Плоскость и прямая в пространстве с примерами решения

15) Линейные пространства. Определение и примеры линейных пространств. Понятие n-мерного вектора и n-мерного векторного пространства.

Множество V называется линейным пространством, а его элементы векторами, если:

1. Каждым двум векторам x и y ставится в соответствие элемент x + y = V – называемый суммой векторов
2. Каждому элементу x и действительному числу λ, , называемый произведением вектора на число, причем ( выполняются свойства:
3. x + y = y + x
4. (x + y) + z = x + (y + z)
5. (λ + m)x = λx + mx
6. (λm)x = λ(mx)
7. 1\*x = x

Примеры:

1. Множество решений СЛУ
2. [a ; b]
3. Множество многочленов

n-мерный вектор – упорядоченная совокупность n действительных чисел

x = (x1, x2,…,xn)

n-мерное векторное пространство – операции, которые его составляют:

1. Суммой двух векторов x и y называют вектор x+y=(x1+y1,x2+y2,…,xn+yn)
2. Умножение на число: x на λ , называют вектор λx =(λx1; λx2;…; λxn)

16) Понятие линейной комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов.

Линейная комбинация векторов – выражение вида λ1a1 + λ2a2 + … + λmam (λ1, λ2,…, λm )

Пусть имеется равенство λ1a1 + λ2a2 + … + λmam = 0

Линейная зависимость системы векторов – если равенство выполняется при условии, что хотя бы одно λi не равно 0, то вектора a1,a2,…,am – линейно зависимые

Линейная независимость системы векторов – если равенство выполняется при условии, что все λi = 0, то вектора a1,a2,…,am – линейно независимые

17) Размерность и базис системы векторов.

Подсистема S’ называется *БАЗИСОМ* системы S, если:

1) S’ линейно независима

2) добавление к S’ любого вектора системы S превращает её в линейно зависимую систему.

*Теорема:* два базиса одной и той же системы содержит одинаковое количество векторов.

*РАЗМЕРНОСТЬЮ* векторного пространства называется число базисных векторов.

*Теорема:* любой вектор пространства R^n может быть единственным способом представлен в виде линейных векторов одного базиса.

18) Алгоритм нахождения базиса системы векторов. Переход к новому базису.

*Алгоритм нахождения базиса:*

1) составить матрицу из координат векторов в столбик

2) найти ранг полученной матрицы. Ранг показывает число векторов базиса

3) преобразовать полученную ступенчатую матрицу, чтобы в ней было n столбцов вида: (столбики ступенчатой матрицы, умноженные друг на друга)

4) векторы, не входящие в базис, имеют координаты в найденном базисе, равные разложенным элементам.

*Переход к новому базису:*

Пусть в пространстве R^n заданы два базиса

L1, l2, …, ln – «старый» базис

L1’, l2’, …, ln’ – «новый» базис

Пусть координаты нового и старого базиса связаны отношением:

(следующая запись записывается в системе)

L1’ = a11l1 + a21l2 + … + an1ln

L2’ = a12l1 + a22l2 + … + an2ln

…

Ln’ = a1nl1 + a2nl2 + … + annln

(запись в системе закончена)

E = (l1 l2 … ln)

E’ = (l1’ l2’ … ln’)

(a11 a12 … a1n)

T = (a21 a22 … a2n)

(an1 an2 … ann)

E’ = E \* T => E = E’ \* T^-1

Для составления матрицы перехода от старого базиса к новому, необходимо координаты новых базисных векторов в старом базисе записать в столбик.

Матрица перехода от старого базиса к новому – это T^-1

Пусть x э R^n, его координаты в старом и новом базисе имеют вид:

«старый»: x = (x1, x2, …, xn) => x = x1l1 + x2l2 + … + xnln

«новый»: x = (x1’, x2’, …, xn’) => x = x1’l1’ + x2’l2’ + … + xn’ln’

X = x1’l1’ + x2’l2’ + … + xn’ln’ = x1’(a11l1 + a21l2 + … + an1ln) + x2’(a12l1 + a22l2 + … + an2ln) + … + xn’(a1nl1 + a2nl2 + … + annln) = x1’a11l1 + x1’a21l2 + + … + x1’an1ln + x2’a12l1 + x2’a22l2 + … + x2’an2ln + … + xn’a1nl1 + xn’a2nl2 + + … + xn’annln = l1(a11x1’ + a12x2’ + … + a1nxn’) + l2(a21x1’ + a22x2’ + … + a2nxn’) + … + ln(an1x1’ + an2x2’ + … + annxn’)

(следующая запись в системе)

X1 = a11x1’ + a12x2’ + … + a1nxn’

X2 = a21x1’ + a22x2’ + … + a2nxn’

…

Xn = an1x1’ + an2x2’ + … + annxn’

(запись в системе закончена)

Если столбец x (x1 x2 … xn) – в старом базисе,

X’ = (x1’ x2’ … xn’) – в новом базисе, то x = T \* x’ => x’ = T^-1 \* x, где Т – матрица перехода.

19) Евклидово пространство. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации векторов.

(далее запись вида «х\_» будет означать, что палочка находится над х!!!, а /\ - лямбда)

Векторное пространство (V) называют Евклидовым, если любой паре векторов данного пространства поставлено в соответствие действительное число (х\_у\_ или (х\_, у\_)), обладающее следующими свойствами:

1) x\_y\_ = y\_x\_

2) (x\_ + y\_)z\_ = x\_z\_ + y\_z\_

3) (/\х\_)у\_ = /\(х\_у\_)

4) х\_х\_ > 0, x\_x\_ = 0 ⬄ x\_ = 0

Если х и у – векторы пространства R^n(x\_, y\_ э R^n),

X\_ = (x1; x2; …; xn), y\_ = (y1; y2; …; yn), то x\_y\_ = x1y1 + x2y2 + … + xnyn

X\_ и y\_ *ортогональные*, если x\_y\_ = 0 (в других пространствах (R^2, R^3) - перпендикулярные)

*Построение ортогонального базиса системы векторов по Шмидту:*

Пусть а1, а2, …, аn – базис э R^n. Требуется «ортогонализировать» данный базис, то есть получить из него ортогональный.

*Алгоритм (по Шмидту):*

1) Пусть l1 = a1

2) l2 - ?, l2 = a2 – *a (альфа)* \* l1, *a* - ?

L1, l2 – ортогональные => l1l2 = 0

L1(a2 – *a*l1) = 0, l1a2 – *a*l1l1 = 0 => *a* = a2l1/l1^2, l2 = a2 – a2l1/l1^2 \* l1

3) l3 = a3 – *в(бетта)*l1 – *v(гамма)*l2 = a3 – a3l1/l1^2 \* l1 – a3l2/l2^2 \*l2

Ln = an – anl1/l1^2 \* l1 – anl2/l2^2 \*l2 - … - anl(n-1)/l(n-1)^2 \* l(n-1), где н-1 – на месте индекса у л.

20) Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Действия над линейными операторами.

Линейные операторы – если для любых двух векторов x,y,λ , выполняются равенства:

1. – свойство линейности
2. – свойство однородности

Если , то оператор отображает вектор x на вектор того же пространства, т.е. отображает пространство само на себя.

Действия над линейными операторами:

1. Сумма линейных операторов – оператор
2. Произведение оператора на число – оператор
3. Произведение операторов – оператор

21) Матрица линейного оператора в разных базисах.

В e1,e2,…,en

x = x1e1 + x2e2 + … + xnen,

y = (y1,y2,…,yn)

y =

; ;

y = Ax

x = (x1,x2,…,xn)

y = (y1,y2,…,yn)

x + y = (x1 + y1; x2 + y2; x3 + y3), λx = (λx1, λx2, λx3)

22) Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Собственные числа –

Собственные векторы линейного оператора – вектор x ≠ 0 в пространстве , если выполняется равенство где λ

23) Ортогональный и самосопряженный оператор, их свойства.

Ортогональный оператор – оператор, матрица которого является ортогональной(перпендикулярной).

Свойства:

**1.** Нулевой вектор ортогонален каждому вектору пространства.

**2.** Взаимно ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.

В самом деле, пусть векторы v1,v2,…,vk попарно ортогональны. Составим из них линейную комбинацию и приравняем ее нулевому вектору:

λ1⋅v1+λ2v2+…+λkvk=o.

Умножим обе части равенства скалярно на вектор v1:

λ1⟨v1,v1⟩+λ2⟨v1,v2⟩+…+λk⟨v1,vk⟩=⟨v1,o⟩.

Следовательно, λ1⋅|v1|2=0. Так как v1≠o, то λ1=o. Аналогично доказываем, что λ2=…=λk=0

, т.е рассматриваемая линейная комбинация тривиальная. Значит, ортогональная система векторов v1,v2,…,vk

 линейно независима.

**3.** Если сумма взаимно ортогональных векторов равна нулевому вектору, то каждое из слагаемых равно нулевому вектору.

**4.** Если вектор uuортогонален каждому вектору системы v1,v2,…,vk, то он также ортогонален и любой их линейной комбинации. Другими словами, если u⊥vi, i=1,…,k, то u⊥Lin(v1,…,vk).

**5.** Если вектор uuортогонален подмножеству MM евклидова пространства, то он ортогонален и линейной оболочке этого подмножества, т.e.

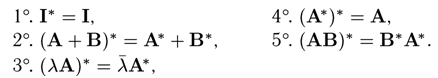
u⊥M ⇒ u⊥Lin(M).

**6.** Если v1,v2,…,vkv1,v2,…,vk— ортогональная система векторов, то

|v1+v2+…+vk|2=|v1|2+|v2|2+…+|vk|2.

Самосопряженный оператор – если выполняется условие (Ax, y) = (x, Ay)

Свойства:



24) Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду.

Квадратичная форма – однородный многочлен 2-ой степени относительно переменных x1,x2,…,xn

L(x1,x2,…,xn) =

Квадратичную форму от n-переменных называют канонической, если для i ≠ j, , т.е. квадратичная форма имеет вид L(x1,x2,…,xn) = a11x1^2 + a22x2^2 + … + annxn^2. Для приведения квадратичной формы к каноническому виду применяют методы:

1. В переходят от ортонормированного пространства e1,e2,…,en(евклидово пространство) к базису e1’,e2’,…,en’ из собственных векторов матрицы А квадратной формы, тогда квадратичная форма принимает более простой вид: L(y1,y2,…,yn) = λ1y1^2+λ2y2^2 +…+λnyn^2
2. Метод Лагранжа(выделяют полные квадраты для переменных(x1,x2,…,xn). Далее выражение, полученное в скобках заменяют на(y1,y1,…,yn).